SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Programación lineal

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal tiene como finalidad maximizar o minimizar una función objetivo.

Estructura de un problema de PL:

máx. (mín.) $f(x;y) = ax + by$ **Función objetivo**

Sujeto a (s.a.):

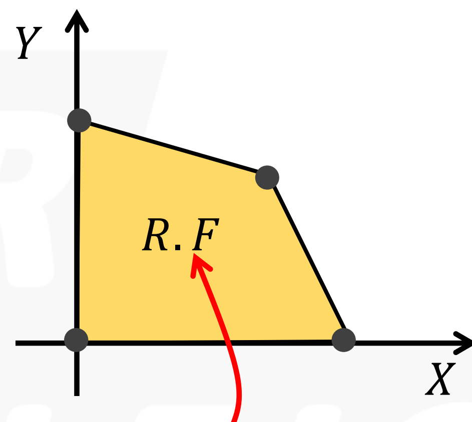
$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \ldots (*) \end{cases}$$

Restricciones

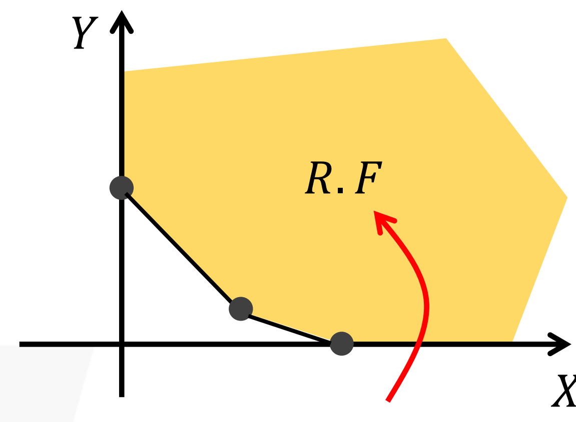
$(*)$ condición de no negatividad

Observación:

La gráfica del conjunto de restricciones es llamada **región factible** y esta puede ser acotada o no acotada, es decir:



Región factible acotada



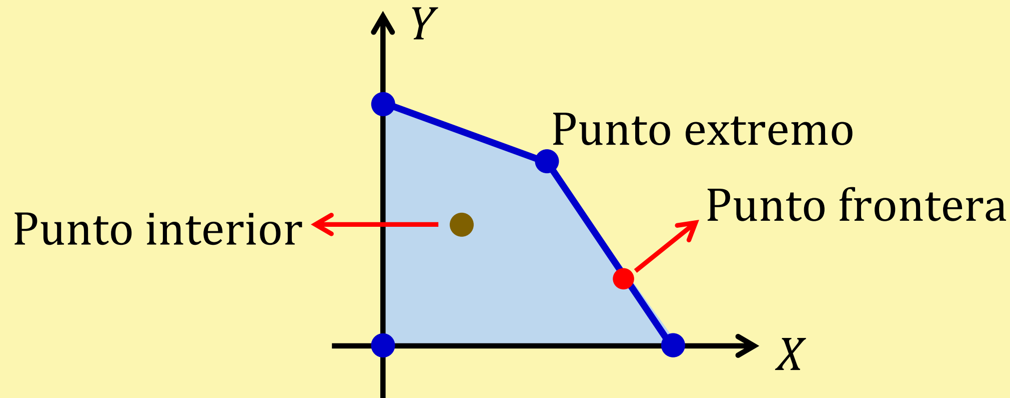
Región factible no acotada

Nota

- La R.F. es un conjunto convexo.
- El número de vértices de la R.F. siempre es finita.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Observación:



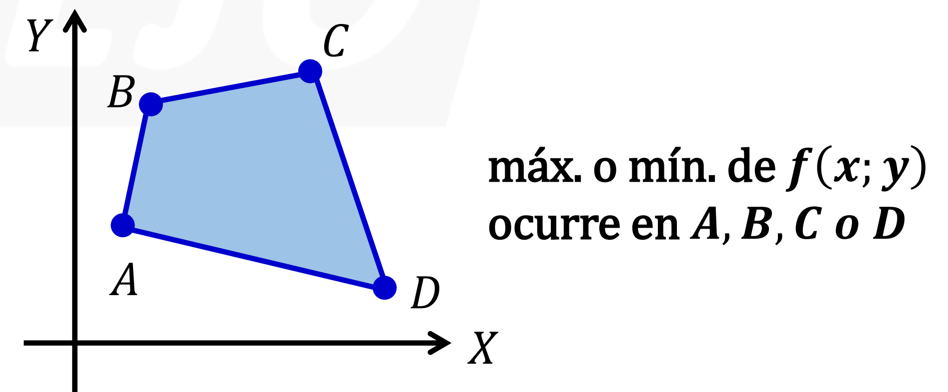
Un punto extremo (vértice) también es punto frontera.

Definiciones:

- **Punto factible** (punto adherente): Es todo punto que pertenece a la región factible.
- **Solución óptima:** Es aquel punto perteneciente a la región factible que maximiza o minimiza a la función objetivo.
- **Valor óptimo:** Es el máximo o mínimo valor que adquiere la función objetivo .

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Si un problema de **Programación Lineal** tiene región factible no vacía, entonces, si existe el óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible.

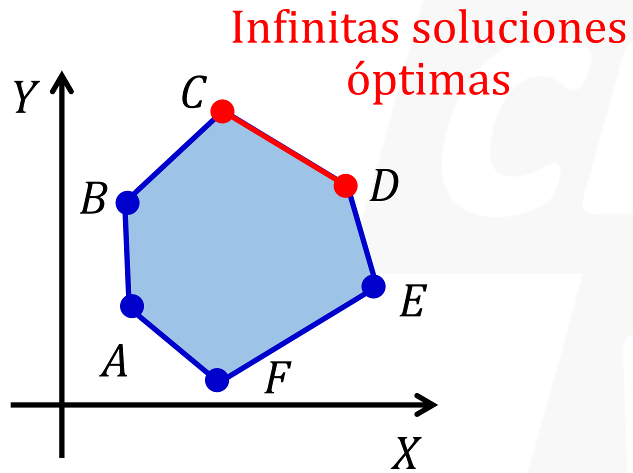


máx. o mín. de $f(x; y)$ ocurre en A, B, C o D

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Corolario

Si el óptimo de la función objetivo ocurre en dos puntos extremos, entonces se tiene el mismo valor en el segmento que une dichos puntos.



Si $f(C) = f(D) = \text{máx}\, f$

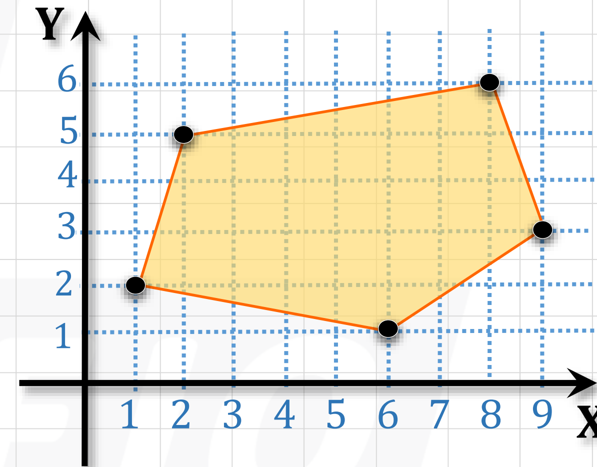
$\rightarrow$ $\text{máx}\, f = f(P);\ \forall\, P \in \overline{DC}$

Aplicación

Resuelva el siguiente problema

Min.: $f_{(x;y)} = -4x + 3y$

Sujeta a la siguiente región

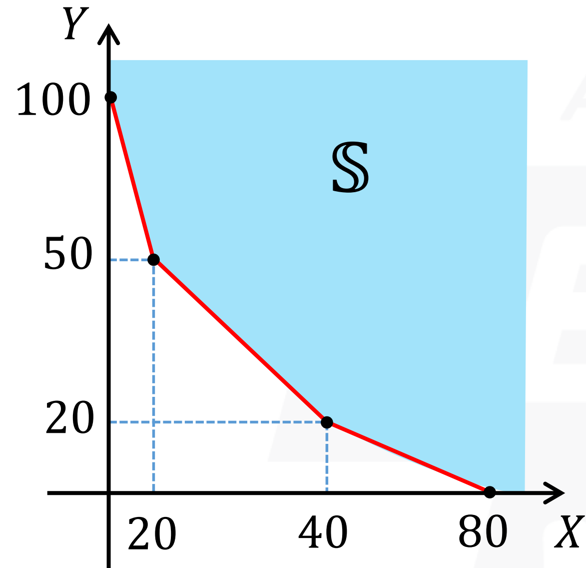


Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

La región admisible $\mathbb{S}$ del problema de programación lineal mín $f(x;\ y) = 6x + 4y$ se muestra en el gráfico.



Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. El valor óptimo es 320.

II. El problema tiene infinitas soluciones.

III. El punto $(26; 41)$ es una solución.

Resolución

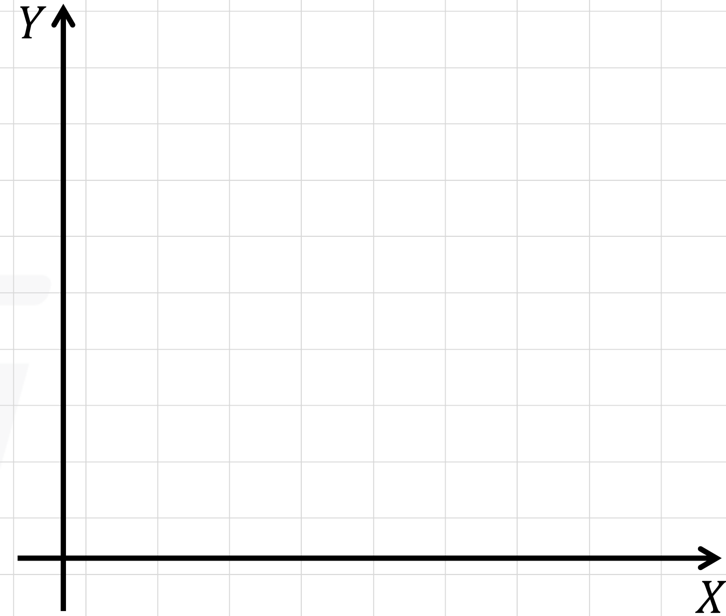
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Calcule el valor máximo de la función objetivo $f(x;y) = 12x + 14y$ sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0\,;\, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PL CON USO DE RECTAS DE NIVEL

RECTAS DE NIVEL

Las rectas de nivel de la función objetivo $z = ax + by$ se obtiene asignándole cualquier real a z.

$$k = ax + by \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b};\ k \in \mathbb{R}$$

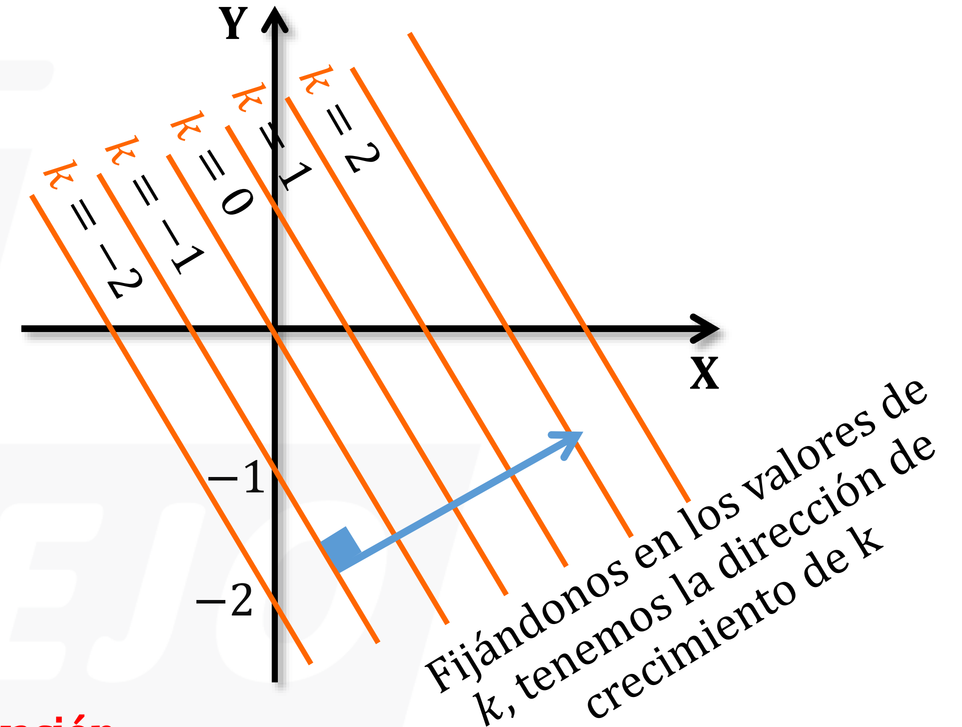
Ejemplo:

Determine las rectas de nivel que genera la función $f(x;y) = 2x + y$

Resolución:

$$k = 2x + y$$

$k = -2$	$-2 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x - 2$
$k = -1$	$-1 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x - 1$
$k = 0$	$0 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x$
$k = 1$	$1 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x + 1$
$k = 2$	$2 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x + 2$



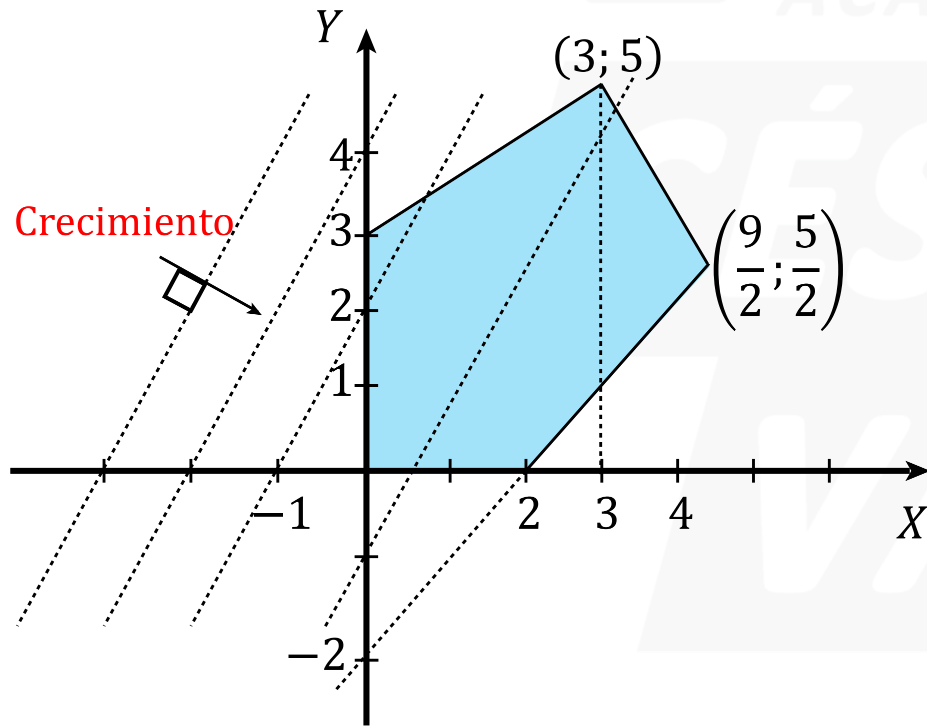
Observación:

Las rectas de nivel, son rectas paralelas de pendiente $-a/b$, por lo tanto será suficiente graficar una de ellas y las otras serán paralelas a la primera.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

La región admisible S y el crecimiento de la función objetivo del problema maximizar $f(x,y)$ s.a. $(x,y) \in S$ se muestra en la siguiente figura:



Determine el máximo valor de $f(x;y)$.

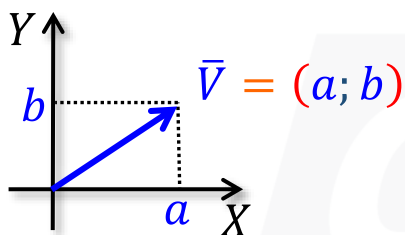
Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

VECTOR DIRECCIÓN

Considerando a y b positivos

Este vector ($\bar{V}$) nos indica la dirección en que aumenta $z = ax + by$.



- La pendiente del vector dirección de crecimiento es: $m_{\bar{V}} = \frac{b}{a}$

- Pendiente de las rectas de nivel: $m_{\mathcal{L}} = -\frac{a}{b}$

- Las rectas de nivel y el vector de dirección de crecimiento son perpendiculares

$$m_{\mathcal{L}} \times m_{\bar{V}} = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Determine las rectas de nivel y su vector dirección de crecimiento, que genera la función $f(x; y) = 2x - y$

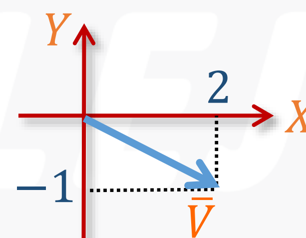
Resolución:

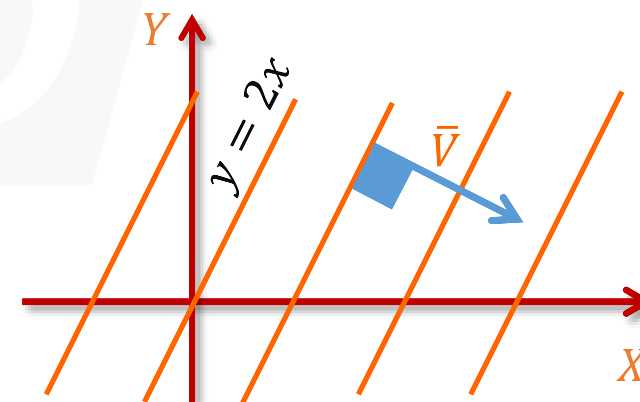
Es suficiente dibujar una recta de nivel: $k = 2x - y$,

$k = 0$: $\quad 0 = 2x - y \quad \leftrightarrow \quad y = 2x$

Las otras son paralelas

Vector dirección de crecimiento: $\bar{V} = (2; -1)$





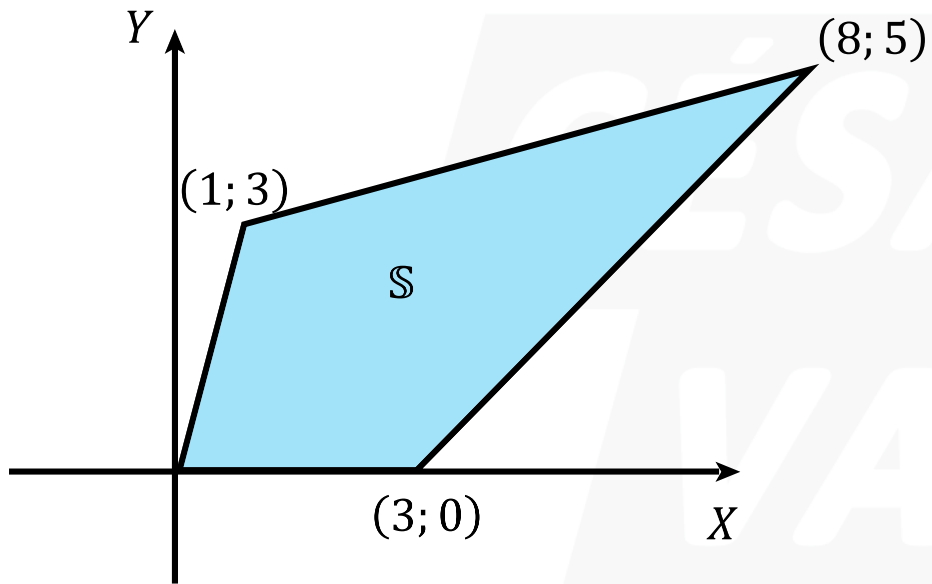
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Resuelva el siguiente problema

$$Máx. z = x - 2y$$

Sujeto a la siguiente región



Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe